

МАТЕМАТИКА 1 (для Р1 и Р4)

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену.

1. Полностью правила дифференцирования и таблица производных.

Правила дифференцирования

- 1) $C' = 0$;
- 2) $x' = 1$;
- 3) $(U \pm V)' = U' \pm V'$;
- 4) $(CU)' = C \cdot U'$;
- 5) $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$;
- 6) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}, V \neq 0$.

Здесь C – константа, U и V – дифференцируемые функции переменной x .

Таблица производных

- 1) $(U^a)' = a \cdot U^{a-1} \cdot U'$;
- 2) $(e^U)' = e^U \cdot U'$;
- 3) $(a^U)' = a^U \cdot \ln a \cdot U'$, ($a > 0, a \neq 1$);
- 4) $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$;
- 5) $(\log_a U)' = \frac{U'}{U \cdot \ln a}$, ($a > 0, a \neq 1$);
- 6) $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$;
- 7) $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$;
- 8) $(\operatorname{tg} U)' = \frac{U'}{\cos^2 U}$;
- 9) $(\operatorname{ctg} U)' = -\frac{U'}{\sin^2 U}$;
- 10) $(\arcsin U)' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$;
- 11) $(\arccos U)' = -\frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$;
- 12) $(\operatorname{arctg} U)' = \frac{U'}{1+U^2}$;
- 13) $(\operatorname{arcctg} U)' = -\frac{U'}{1+U^2}$;
- 14) $(U^V)' = U^V \left(V' \cdot \ln U + V \cdot \frac{U'}{U} \right)$.

Здесь a – число, U и V – дифференцируемые функции переменной x .

2. Определение предела функции.

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ и входящих в область определения функции $f(x)$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тогда пишут $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

3. Определение производной.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется **производной функции** $y = f(x)$ в точке x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x , при этом она обязательно непрерывна в этой точке.

Геометрически величина производной $f'(x)$ представляет собой **угловой коэффициент касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке x .

4. Уравнение касательной.

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид:
 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

5. Таблица эквивалентных пар.

- 1) $\sin U \underset{U \rightarrow 0}{\sim} U$;
- 2) $\operatorname{tg} U \underset{U \rightarrow 0}{\sim} U$;
- 3) $\arcsin U \underset{U \rightarrow 0}{\sim} U$;
- 4) $\operatorname{arctg} U \underset{U \rightarrow 0}{\sim} U$;
- 5) $1 - \cos U \underset{U \rightarrow 0}{\sim} \frac{U^2}{2}$;
- 6) $e^U - 1 \underset{U \rightarrow 0}{\sim} U$;
- 7) $a^U - 1 \underset{U \rightarrow 0}{\sim} U \ln a$;
- 8) $\ln(1 + U) \underset{U \rightarrow 0}{\sim} U$;
- 9) $(1 + U)^\mu - 1 \underset{U \rightarrow 0}{\sim} \mu U$;
- 10) $U^V \underset{\substack{U \rightarrow 1 \\ V \rightarrow \infty}}{\sim} e^{V(U-1)}$.

Здесь a, μ – числа, U и V – функции переменной x .

6. Формула для вычисления первой производной параметрической функции.

Если система уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $x(t), y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'_t \neq 0$, определяет y как однозначную непрерывную функцию от x , то производная y'_x существует и равна $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

7. Необходимые условия возрастания (убывания) дифференцируемой функции.

Если дифференцируемая в интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всех x из $(a; b)$.

8. Определение максимума (минимума).

Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $y = f(x)$, если существует такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если существует такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

На нижеприведенном рисунке x_1 – точка минимума, x_2 – точка максимума.

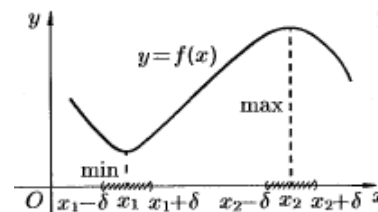
11. Формула Тейлора для функции с остаточным членом в форме Пеано.

Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 , то в некоторой окрестности этой точки справедлива **формула Тейлора**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ – остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано.

Запись $o((x-x_0)^n)$ означает, что, заменив $f(x)$ в окрестности точки x_0 ее многочленом Тейлора n -ой степени, мы совершим ошибку, представляющую собой при $x \rightarrow x_0$ бесконечно малую более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$.



Значение функции в точке максимума (минимума) называется **максимумом** (**минимумом**) функции.

Максимум (минимум) функции называется **экстремумом** функции. Функция может иметь экстремум только во внутренних точках области определения, поскольку δ -окрестность точки максимума (минимума) должна принадлежать области определения функции.

9. Необходимые условия экстремума дифференцируемой функции.

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

10. Необходимые условия выпуклости вверх (вниз) дифференцируемой функции.

Если кривая $y = f(x)$ в интервале $(a; b)$ выпукла вверх (вниз), то вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна (положительна) во всех точках интервала, т.е. $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), кроме, может быть, отдельных точек, в которых она равна нулю.